Correction TD du 20/01 :

Exercice 11 :

1) $$\mathbb{1}_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \subset \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \in A^c \end{cases}.$$

Pour montrer que $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire, on doit montrer qu'elle est mesurable, c'est-à-dire que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, \mathbb{1}_A(\omega) \in B\}$ est mesurable.
Or puisque $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0,1\}$, il suffit de séparer les cas selon que 0 ou 1 appartient à B ou non :

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega \text{ si } 0 \in B, 1 \in B \\ A \text{ si } 0 \notin B, 1 \in B \\ A^c \text{ si } 0 \in B, 1 \notin B \\ \emptyset \text{ si } 0 \notin B, 1 \notin B. \end{cases}$$

Dans tous les cas, $\mathbb{1}_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (car $\emptyset$, Ω sont toujours dans la tribu et car $A \in \mathcal{A}$).

$\mathbb{1}_A$ est donc une variable aléatoire. Pour donner sa loi, il suffit de donner :
(car $\mathbb{1}_A \in \{0,1\}$)

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\})) = \mathbb{P}(A)$$

et $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) = 1 - \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Ainsi, la loi de $\mathbb{1}_A$ est la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$, ce qui se note

$$\boxed{\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))}$$

En particulier, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

2) On vérifie que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

On en déduit alors :

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_{(A^c\cap B^c)^c} = 1-\mathbb{1}_{A^c\cap B^c}$$

$$= 1-\mathbb{1}_{A^c}\times\mathbb{1}_{B^c}$$

$$= 1-(1-\mathbb{1}_A)(1-\mathbb{1}_B).$$

Par récurrence, on a donc, pour $A_1,\dots,A_p$ des évènements :

$$\begin{cases} \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i=1}^{p} A_i} = \prod\limits_{i=1}^{p} \mathbb{1}_{A_i} \\ \mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i} = 1-\prod\limits_{i=1}^{p}(1-\mathbb{1}_{A_i}). \end{cases}$$

3) On utilise l'expression ci-dessus, et la question 1) :

$$\mathbb{P}(U) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mathbb{1}_{A_i})\right).$$

En développant le produit dans l'espérance (chaque terme correspond à un choix d'indices pour lesquels on prend les A_j), on a :

$$P(U) = E\Big(1 - \sum_{J \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|} \mathbb{1}_{\bigcap_{j \in J} A_j}\Big).$$

Par linéarité de l'espérance :

$$P(U) = 1 + \sum_{J \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|-1} P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big)$$

opposé du terme correspondant à $\emptyset$ dans la somme

$$= \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big).$$

Exercice 15 :

1) On calcule, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n+1) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(X > n+1 \cap X > n)$$

car $(X > n+1) \subset (X > n)$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X > n+1 \mid X > n)}_{= \mathbb{P}(X > 1) \text{ par l'énoncé}} \mathbb{P}(X > n)$$

$$= \mathbb{P}(X > 1) \mathbb{P}(X > n).$$

On a donc une suite géométrique de raison $\mathbb{P}(X > 1) =: 1 - p$.

2) On a donc (on connait la raison et le 1er terme $\Rightarrow$ on connait la suite)

$$\mathbb{P}(X > n) = \underbrace{\mathbb{P}(X > 0)}_{= 1 \text{ car } X \in \mathbb{N}^*} (1 - p)^n$$

Finalement, puisque $X \in \mathbb{N}^*$, pour avoir sa loi, il suffit de connaître

$$\mathbb{P}(X=n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Or $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X>n-1) - \mathbb{P}(X>n)$

$$= (1-p)^{n-1} - (1-p)^n$$

on factorise par $(1-p)^{n-1}$

$$= (1-p)^{n-1}(1-(1-p))$$

$$= (1-p)^{n-1} p$$

$$= \mathbb{P}(\mathcal{G}(p) = n).$$

Ainsi, $X \sim \mathcal{G}(p)$. Les seules lois possibles sont les lois géométriques.

<u>À RETENIR</u>: Pour déterminer la loi de $X \in \mathbb{N}$ on calcule $\mathbb{P}(X=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on tombe sur une loi connue μ, alors on peut dire que X a pour loi μ ($X \sim \mu$).

Exercice 18 : En général, pour déterminer une loi inconnue, on utilise un outil parmi les cinq suivants :

- $(\mathbb{P}(X=n))_n$
- série génératrice

pour $X \in \mathbb{N}$ uniquement

- fonction de répartition
- fonction caractéristique
- fonctions test $(\mathbb{E}[h(X)])\ \forall h \in C_b(\mathbb{R}))$

plutôt pour les lois continues (à densité).

On utilise alors l'outil le plus adapté à la situation. Ici, on a des lois exponentielles, l'outil le plus adapté est la fonction de répartition.

À RETENIR : fct de répartition surtout pour expo/uniforme.

Pour la loi normale, le bon outil est la fonction caractéristique (la fct de rép. de $\mathcal{N}(0,1)$ ne se calcule pas).

Calculons donc, pour $t \in \mathbb{R}_+$

$t \leq 0$ inutile car $\min(X,Y) \geq 0$.

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) \leq t) =$$

$$1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > t)$$

min + grand si les 2 sont + grands

$$= 1 - \mathbb{P}(X > t \cap Y > t)$$

car X et Y sont indépendantes

$$= 1 - \mathbb{P}(X>t)\,\mathbb{P}(Y>t)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} e^{-\mu t}$$

En effet, $\mathbb{P}(X>t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du$

$$= \left[-e^{-\lambda u}\right]_t^{+\infty} = e^{-\lambda t}$$

idem pour $\mathbb{P}(Y>t) = e^{-\mu t}$.

Donc $\mathbb{P}(\min(X,Y) \leq t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$.

Ainsi, puisque la fonction de répartition caractérise la loi :

$$\min(X,Y) \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu).$$

À RETENIR : La méthode consiste à calculer la fct de rép. de la variable dont on veut la loi et d'identifier une loi connue. On va faire pareil dans l'exercice 20.

Exercice 20:

1) Pour montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité, il faut et il suffit de montrer que

$\longrightarrow$ f est mesurable positive

$\longrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}} f = 1.$

Ici, $f : x \longmapsto \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} \mathbb{1}_{x \geq 0}$

est continue sur $\mathbb{R}$ et positive donc ok pour le 1er point (continue par morceaux implique mesurable)

et $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \left[- e^{-x^2/2\sigma^2} \right]_0^{+\infty} = 1.$

Donc on a bien une densité de probabilité.

2) Même principe que tout à l'heure, on va montrer que la fonction de répartition de $\sigma\sqrt{-2\log(U)}$ coïncide avec celle de la loi de Rayleigh, qui vaut

$$F(x) := \int_0^x \frac{u}{\sigma^2} e^{-u^2/2\sigma^2} du$$

$$= 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Soit $x \geq 0$:

$$\mathbb{P}(\sigma\sqrt{-2\log(U)} \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(U \geq e^{-x^2/2\sigma^2}).$$

on isole U car on connaît sa loi

Or pour $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ et $u \in]0,1[$:

$$\mathbb{P}(U \geq u) = \int_0^1 \mathbb{1}_{]u,1]}(v)\,dv$$

(la densité de $\mathcal{U}(0,1)$ est $\mathbb{1}_{(0,1)}$)

$$= \int_u^1 dv = (1-u).$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(U \geq e^{-x^2/2\sigma^2}\right) = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2},$$

ce qui donne le résultat voulu :

$$\boxed{\sigma\sqrt{-2\log(U)} \text{ suit une loi de Rayleigh de paramètre } \sigma}$$